Απειροστικός Λογισμός Ι   Μάθημα 5   19/10/2015   (1)

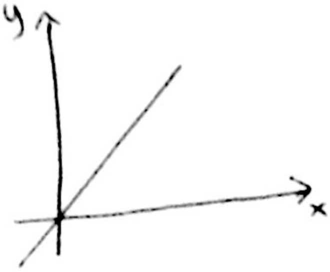
Παράδειγμα 2:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x$

λέγεται ταυτοτική

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$



Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

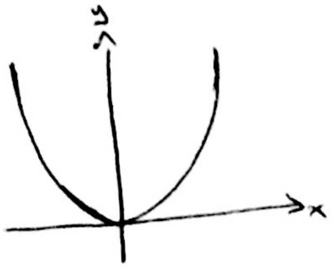
Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ γραφική παράσταση της f είναι το σχήμα που αποτελείται από όλα τα σημεία $(x, f(x))$, $x \in A$.

Παράδειγμα 3:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$

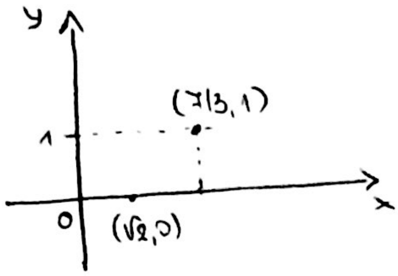


Παράδειγμα 4:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$

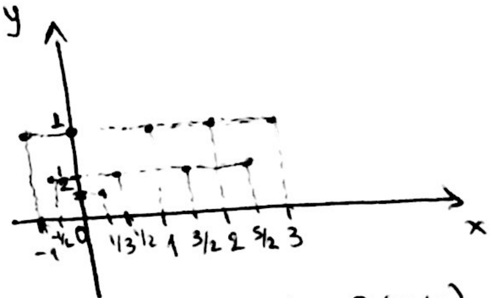


Παράδειγμα 5:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ (m,n) = 1 \\ 0 & ,\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f(\mathbb{R}) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$



$1/2 = f(1/2) = f(3/2) = f(5/2) = f(7/2)$

$1/3 = f(1/3) = f(2/3) = f(4/3) = f(5/3)$

$1/4 = f(1/4) = f(3/4) = f(5/4) = f(7/4)$

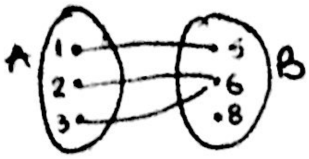
Ορισμός: Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση.

(i) Η f λέγεται <u>επί</u> (του B) αν $f(A) = B$, δηλαδή $\forall y \in B\ \exists x \in A$ τ.ω. $f(x) = y$.

(ii) Η f λέγεται <u>1-1</u> αν $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$

Ισοδύναμα η f λέγεται <u>1-1</u> αν $\forall x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

<u>παραδείγματα:</u> i)



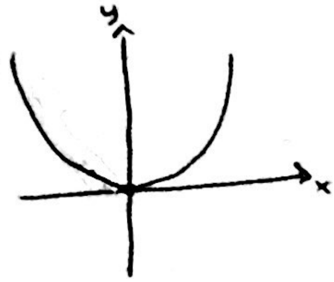
$f(1)=5$

$f(2)=f(3)=6$

Η f δεν είναι επί διότι το $8\in B$ αλλά $\nexists x\in A$ τ.ω. $f(x)=8$

Η f δεν είναι 1-1 διότι $2\neq 3$ όμως $f(2)=f(3)$

ii)



$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$

Η f δεν είναι 1-1 διότι $f(5)=f(-5)$

Η f δεν είναι επί διότι π.χ. για $y=-1$ δεν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τ.ω. $f(x)=-1$.

Η f δεν είναι

<u>Παρατήρηση:</u>

Αν μια συνάρτηση $f:A\to B$ δεν είναι επί, τότε αντικαθιστώντας το πεδίο τιμών B με το σύνολο τιμών της $f(A)$, την καθιστούμε επί. $f:A\to f(A)$.

iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$.

<u>Η f είναι επί</u>

Έστω $y\in\mathbb{R}$. Αναζητούμε x ώστε $f(x)=y \Rightarrow 3x-2=y \Rightarrow 3x=y+2 \Rightarrow x=\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$

Άρα, η f είναι επί (το $\mathbb{R}$).

<u>Η f είναι 1-1</u>

Αν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3x_1-2=3x_2-2\Rightarrow 3x_1=3x_2\Rightarrow x_1=x_2$.

Άρα, η f είναι 1-1.

iv) $f:[0,1]\to[2,7]$, $f(x)=3x+2$

Η f είναι 1-1 (εύκολο)

Η f δεν είναι επί

(δεν υπάρχει $x\in[0,1]$ τ.ω. $f(x)=7$.

v) $f:[-2,2]\to[0,4]$, $f(x)=x^2$

Η f δεν είναι 1-1 γιατί $f(2)=f(-2)$

ενώ η f είναι επί.

Σύνθεση Συναρτήσεων

Αν $f: A \to B$ και $g: \Gamma \to \Delta$ δυο συναρτήσεις ώστε $f(A) \subseteq \Gamma$, δηλαδή η εικόνα της f περιέχεται στο πεδίο ορισμού της g. Τότε $\forall x \in A$ $f(x) \in \Gamma$ άρα ορίζεται $g(f(x))$.
Έτσι, ορίζεται μια συνάρτηση $g \circ f: A \to \Delta$ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\forall x \in A$.

<u>Ορισμός:</u> Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση.
α) $\forall X \subseteq A$ η εικόνα του συνόλου X μέσω της f είναι το σύνολο $f(X) =$
$= \{y \in B \ \exists x \in X \ f(x) = y\} = \{f(x) \ x \in X\}$.
β) Για $Y \subseteq B$ αντίστροφη εικόνα του συνόλου Y μέσω της f είναι το σύνολο
$f^{-1}(Y) = \{x \in A \ f(x) \in Y\}$.

<u>Παραδείγματα:</u> i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$
$f([1,2]) = [1,4]$

ii) $f^{-1}([4,6])$ $\quad x \in f^{-1}([4,6]) \Leftrightarrow f(x) \in [4,6]$
$4 \leq x^2 \leq 6 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{6}, -2] \cup [2, \sqrt{6}]$

Αντίστροφη Συνάρτηση

Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση, η οποία είναι 1-1 και επί
Τότε, $\forall y \in B$ $\exists x \in A$ τ.ω. $f(x) = y$ (αφού f επί) και αυτό το x είναι μοναδικό (διότι η f 1-1).
Έτσι, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f (που συμβολίζεται με f^{-1})
$f^{-1}: B \to A$ $\quad f^{-1}(y) =$ «το μοναδικό x για το οποίο ισχύει $f(x) = y$»
Έτσι, $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

<u>Παρατήρηση</u>
Αν η $f: A \to B$ είναι 1-1 αλλά όχι επί αντικαθιστώ το B με το $f(A)$. Έχω $f: A \to f(A)$ 1-1 και επί άρα μπορώ να μιλήσω για την αντίστροφή της $f^{-1}: f(A) \to A$

<u>Πρόταση:</u> Αν $f: A \to B$ 1-1 και επί (οπότε ορίζεται η $f^{-1}: B \to A$)
(η f^{-1} είναι πάντα 1-1 και επί)
Τότε $(f^{-1} \circ f)(x) = x, \forall x \in A$ $\quad$ Δηλαδή, η $f^{-1} \circ f$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση του
$(f \circ f^{-1})(y) = y, \forall y \in B$ $\quad$ συνόλου A (Id_A ή I_A)
και η $f \circ f^{-1}$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση του συνόλου B
(Id_B ή I_B).

<u>Παραδείγματα</u>: i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+6$

<u>Η f είναι 1-1</u>

Για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 4x_1+6=4x_2+6\Rightarrow 4x_1=4x_2\Rightarrow x_1=x_2$. Άρα 1-1

<u>Η f είναι επί</u>

$f(x)=y\Leftrightarrow 4x+6=y\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}y-\frac{3}{2}$

$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f^{-1}(y)=\frac{1}{4}y-\frac{3}{2}$ ή $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$

ii) Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

Η f δεν είναι 1-1 ούτε επί

Η $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^2$

Είναι 1-1 αλλά όχι επί

Αντικαθιστώντας το $\mathbb{R}$ με το $g([0,+\infty))=[0,+\infty)$ έχουμε $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ είναι 1-1 και επί.

$g^{-1}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ $g^{-1}(y)=\sqrt{y}$ ή $g^{-1}(x)=\sqrt{x}$.

Αν $f:A\to B$ και $\Gamma\subseteq A$ ο περιορισμός της f στο Γ είναι η συνάρτηση $g:\Gamma\to B$ με $g(x)=f(x)$ $\forall x\in\Gamma$ και συμβολίζεται με $g=f|_\Gamma$ (στο προηγούμενο παράδειγμα $g=f|_{[0,+\infty)}$)

Πράξεις Συναρτήσεων

Αν $f,g:A\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις τότε ορίζονται

α) το άθροισμα της $f+g:A\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

β) το γινόμενο της $f\cdot g:A\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

γ) το $-f:A\to\mathbb{R}$ $(-f)(x)=-f(x)$

δ) θέτοντας $\Gamma=\{x\in A\,|\,g(x)\neq 0\}$ $\frac{f}{g}:A\to\mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ (όπου $A\subseteq\mathbb{R}$). Η f λέγεται:

α) <u>αύξουσα</u>

β) <u>γνησίως αύξουσα</u>

γ) <u>φθίνουσα</u>

δ) <u>γνησίως φθίνουσα</u>

ε) <u>μονότονη</u> (αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα)

στ) <u>γνησίως μονότονη</u> (αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα).

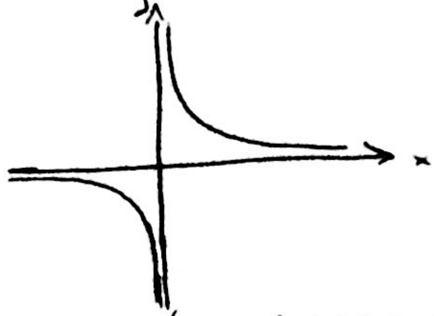
α) $\forall x_1, x_2 \in A$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

β) $\forall x_1, x_2 \in A$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

γ) $\forall x_1, x_2 \in A$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

δ) $\forall x_1, x_2 \in A$ ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Αν $I \subseteq A$ (συνήθως για I διάστημα) λέμε ότι η f είναι αύξουσα στο I $\forall x_1, x_2 \in I$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ομοίως για τις άλλες



Παραδείγματα: i) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)}$

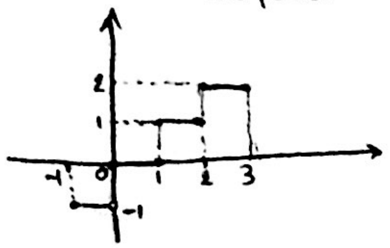
f γν. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και στο $(-\infty, 0)$ αλλά δεν είναι γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. π.χ. $-2 < 3$ όμως $f(-2) < f(3)$.

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$

Η f είναι αύξουσα αλλά όχι γν αύξουσα.



Ορισμός: Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ (όπου $A \subseteq \mathbb{R}$)

α) Η f λέγεται άνω φραγμένη αν $\exists M \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) \leq M$ $\forall x \in A$.

β) Η f λέγεται κάτω φραγμένη αν $\exists m \in \mathbb{R}$ ώστε $m \leq f(x)$ $\forall x \in A$.

γ) Η f λέγεται φραγμένη αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

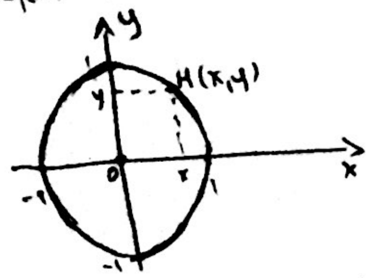
f φραγμένη $\Leftrightarrow \exists M > 0$ $|f(x)| \leq M$ $\forall M \in \mathbb{R}$

Ορισμός: Ακολουθία ονομάζεται οποιαδήποτε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Ορισμός: Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται πολυωνυμική αν $\exists n \in \mathbb{N}$ $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός: Ρητή συνάρτηση ονομάζεται κάθε συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ όπου $p(x)$ και $q(x)$ πολυώνυμα.



Κύκλος κέντρου $O(0,0)$ ακτίνας 1. Ξεκινώντας από το $(1,0)$ διανύουμε τόξο μήκους a κατά μήκος του κύκλου. Αν M το τελικό σημείο αυτού του τόξου, τότε $\cos a = x$, $\sin a = y$

$\sin(2\pi + a) = \sin a$ $\quad \tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$ π.ο. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\cos(2\pi + a) = \cos a$ $\quad \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$ π.ο. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Ορισμός: Αν $f: A \to \mathbb{R}$ η f λέγεται περιοδική με περίοδο T αν $\forall x \in A$

α) $x+T,\ x-T \in A$

β) $f(x+T) = f(x) = f(x-T)$

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$
cot	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$

$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$

$\tan(\pi/2 - x) = \cot x$

$\cot(\pi/2 - x) = \tan x.$